تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الإمتحان الوطني دورة يوليوز 2008

تقديـــم: ذ. الوظيفي

التمرين الأول :

1. نحل في C المعادلة : $z^2-8z+17=0$:

مميز المعادلة هو: $\Delta=(-8)^2-4\times1\times17=-4$

إذن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما : $z_1=\dfrac{8-2i}{2}=4-i$ و $z_2=\dfrac{8+2i}{2}=4+i$

ومنه :

مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{4-i\,;4+i\}$

2.أ-نبين أن : $z'=-iz-1+3i$

لدينا

http://www.vrac-coloriages.net

$$M'=R(M)\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-w)+w$$
$$\Leftrightarrow z'=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)(z-w)+w$$
$$\Leftrightarrow z'=\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)(z-w)+w$$
$$\Leftrightarrow z'=\left(-\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)(z-w)+w$$
$$\Leftrightarrow z'=-i(z-1-2i)+1+2i$$
$$\Leftrightarrow z'=-iz+i-2+1+2i$$
$$\Leftrightarrow z'=-iz-1+3i$$

2.ب.نبين أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران R هو $c=-i$:

لدينا C صورة A بالدوران R

إذن $c=-ia-1+3i=-i(4+i)-1+3i=-4i+1-1+3i=-i$

ومنه : لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران R هو $c=-i$.

2.ج.نبين أن $b-c=2(a-c)$:

لدينا :

$$b-c=8+3i-(-i)=8+4i=2(4+2i)=2(4+i-(-i))=2(a-c)$$

نستنتج أن : A و B و C مستقيمية :

لدينا : $b-c=2(a-c)$

إذن : $\dfrac{b-c}{a-c}=2$

وبالتالي : $\dfrac{b-c}{a-c}\in R$

ومنه : A و B و C نقط مستقيمية

التمرين الثاني :

.1 نبين أن مركز الفلكة هي النقطة $I(2;3;-1)$ وشعاعها هو 3.

لدينا :

$$x^2+y^2+z^2+-4x-6y+2z+5=0 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2-6y+z^2+2z+5=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2-2^2+(y-3)^2-3^2+(z+1)^2-1^2+5=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=3^2$$

ومنه : مركز الفلكة هي النقطة $I(2;3;-1)$ وشعاعها هو 3.

2).أ.نبين أن مسافة النقطةI عن المستوى (P) هي $\sqrt{6}$:

مسافة النقطة I عن المستوى (P) هي : $d(I;(P))=\frac{|2+2\times3-1-1|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

2.ب.بما أن مسافة I عن المستوى أصغر قطعا من شعاع الفلكة فإن المستوى (P) يقطع الفلكة وفق دائرة شعاعها شعاعها هو $r=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$.

3.أ.المستقيم عمودي على المستوى (P) و $\vec{n}(1;2;1)$ منظمية على المستوى (P)

إذن $\vec{n}(1;2;1)$ متجهة منظمية على المستقيم (D).ومنه تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو $(t\in R)$ $\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\\z=-1+t\end{cases}$.

3.ب.النقطة H مركز الدائرة (Γ) هي نقطة تقاطع المستقيم والمستوى (P)

بتعويض x و y و z في معادلة المستوى (P)بدلالة t نجد $(2+t)+2(3+2t)+(-1+t)-1=0$ أي $t=-1$

وبالتالي :عند تعويض t بالعدد (-1) في التمثيل البارامتري للمستقيم (D) نجد : $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=-2\end{cases}$

ومنه : مثلوث إحداثيتي H مركز الدائرة (Γ) هو $(1;1;-2)$

التمرينالثالث .

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة .السحب يتم بالتتابع وبدون إحلال إذن كل سحبة عبارة عن ترتيبة بدون تكرار ل3عناصر من بين 7.وبالتالي : $card\Omega=A_7^3=7\times6\times5=210$

1.نحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء :

ليكن A الحدث : " الحصول على ثلاث كرات بيضاء "

بما أنه لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس فإن احتمال الحدث A هو $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{A_4^3}{210}=\frac{4\times3\times2}{210}=\frac{4}{35}$

ومنه : احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء هو $\frac{4}{35}$.

2.نحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون :

ليكن B الحدث : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

بما أنه لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس فإن احتمال الحدث B هو

$$p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{A_4^3+A_3^3}{210}=\frac{4\times3\times2+3\times2\times1}{210}=\frac{1}{7}$$

ومنه : احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$

3. نحسب احتمال الحصول على كرة واحدة بيضاء على الأقل

ليكن C الحدث : " الحصول على كرة واحدة بيضاء على الأقل "

الحدث المضاد للحدث C هو " عدم الحصول على أية كرة بيضاء " أي " الحصول على ثلاث كرات حمراء "

احتمال " الحصول على ثلاث كرات حمراء هو $\frac{A_3^3}{210}=\frac{3\times2\times1}{210}=\frac{1}{35}$

وبالتالي : $p(C)=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$

ومنه : احتمال الحصول على كرة واحدة بيضاء على الأقل هو $\frac{34}{35}$

التمرين الرابع :

1. نبين أن لكل n من N : $u_n \succ 1$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 \succ 1$ لأن $u_0=2$.

ليكن n من N.

نفترض أن $u_n \succ 1$ ولنبين أن $u_{n+1} \succ 1$

لدينا :

وبما أن $u_n \succ 1$ فإن $u_n-1 \succ 0$ و $2u_n+3 \succ 0$ وبالتالي : $\frac{3(u_n-1)}{2u_n+3} \succ 0$ أي $u_{n+1} \succ 1$

ومنه: حسب مبدأ الترجع $u_n \succ 1$ لكل n من N .

2. أ. نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$:

ليكن n من N ،

لدينا : $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{\frac{5u_n}{2u_n+3}-1}{\frac{5u_n}{2u_n+3}}=\frac{5u_n-2u_n-3}{5u_n}=\frac{3u_n-3}{5u_n}=\frac{3}{5}\cdot\frac{u_n-1}{u_n}=\frac{3}{5}v_n$$

إذن : $(\forall n\in N)\ ;\ v_{n+1}=\frac{3}{5}v_n$

ومنه : المتتالية (v_n) هندسية وأساسها هو $\frac{3}{5}$

. نكتب v_n بدلالة n:

حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا $(\forall n\in N):\ v_n=v_0\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$

ولدينا : $v_0=\frac{u_0-1}{u_0}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

ومنه : $(\forall n\in N):\ v_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$

2.ب. نبين أن $(\forall n\in N)\ :\ u_n=\dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

ليكن n من N ،

لدينا : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$ إذن : $v_n=1-\dfrac{1}{u_n}$ وبالتالي : $\dfrac{1}{u_n}=1-v_n$

أي : $u_n=\dfrac{1}{1-v_n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}=\dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

ومنه : $(\forall n\in N)\ :\ u_n=\dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

حساب نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $-1\prec\dfrac{3}{5}\prec 1$ إذن $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$

ومنه : $\lim u_n=1$

مسألــــــــــة :

الجزء 1 : $g(x)=e^{2x}-2x$

2.لكل x من R : $g'(x)=2e^{2x}-2=2\left(e^{2x}-1\right)$

$$\begin{aligned} g'(x)=0 &\Leftrightarrow e^{2x}-1=0\\ &\Leftrightarrow e^{2x}=1\\ &\Leftrightarrow 2x=\ln 1\\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g'(x)\succ 0 &\Leftrightarrow e^{2x}-1\succ 0\\ &\Leftrightarrow e^{2x}\succ 1\\ &\Leftrightarrow 2x\succ \ln 1\\ &\Leftrightarrow x\succ 0\end{aligned}$$

وبالتالي : $g'(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$ و $g'(x)\prec 0$ لكل x من $]-\infty;0[$.

ومنه : g تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ وتناقصية قطعا على $]-\infty;0[$.

2.استنتاج : ليكن x من R

. إذا كان $x\succ 0$

فإن $g(x)\succ g(0)$ لأن g تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

أي $g(x)\succ 1$ وبالتالي : $g(x)\succ 0$

. إذا كان $x\prec 0$

فإن $g(x)\succ g(0)$ لأن g تناقصية قطعا على $]-\infty;0[$

أي $g(x)\succ 1$ وبالتالي : $g(x)\succ 0$

ومنه : $g(x)\succ 0$ لكل x من R .

الجزء 2 : $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2x\right)$

1.أ. لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-2x=+\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ب. ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم ،

لدينا : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{x}=\dfrac{e^{2x}-2x}{x}\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}=\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-2\right)\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$

ومنه : $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-2\right)\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ لكل x من R^*

ج. لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-2\right)=-2$

نضع $t=e^{2x}-2x$ ولدينا : $(x\to-\infty)\Rightarrow(t\to+\infty)$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$.

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

د. لدينا : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

إذن : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $(-\infty)$.

2.أ. ليكن x عنصرا من $[0;+\infty[$ ،

إذن : $g(x)\succ 0$ أي $e^{2x}-2x\succ 0$ وبالتالي $\dfrac{e^{2x}-2x}{e^{2x}}\succ 0$ أي : $1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\succ 0$

ومنه : $1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\succ 0$ لكل x من $[0;+\infty[$

. نبين أن : $f(x)=2x+\ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$:

ليكن x عنصرا من $[0;+\infty[$ ،

لدينا :

$$\begin{aligned}2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)&=2x+\ln\frac{e^{2x}-2x}{e^{2x}}=2x+\ln\left(e^{2x}-2x\right)-\ln e^{2x}\\&=2x+\ln\left(e^{2x}-2x\right)-2x\\&=\ln\left(e^{2x}-2x\right)\end{aligned}$$

ومنه : $2x+\ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)=f(x)$ لكل x من $[0;+\infty[$

2.ب. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{2x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{t}}{t}=+\infty$ بوضع $t=2x$.

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x}}=0$ وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=\ln 1=0$

ومنه : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

2.ج. لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=0$

ومنه : المستقيم (D) المعرف بالمعادلة $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $(+\infty)$

د.ليكن x عنصرا من $[0;+\infty[$ ،

إذن : $-\frac{2x}{e^{2x}}\le 0$ وبالتالي $0\prec 1-\frac{2x}{e^{2x}}\le 1$ ومنه : $\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)\le 0$

وبالتالي : $f(x)-2x\le 0$ لكل x من $[0;+\infty[$.

ومنه :

المنحنى (C) يوجد فوق المستقيم (D) على $[0;+\infty[$

3.أ. الدالة f قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا : $f'(x)=\frac{(e^{2x}-2x)'}{e^{2x}-2x}=\frac{2e^{2x}-2}{g(x)}=\frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$

ب. ليكن x من R ،

لدينا :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{2x}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

و

$$f'(x)\succ 0\Leftrightarrow e^{2x}-1\succ 0 \Leftrightarrow e^{2x}\succ 1 \Leftrightarrow 2x\succ 0 \Leftrightarrow x\succ 0$$

جدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

منحنى الدالة f .