تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الإمتحان الوطني دورة يوليوز 2009

تقديـــم: ذ. الوظيفي

التمرين الأول :

1)لنبين أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,0,1)$ وشعاعها هو 3.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

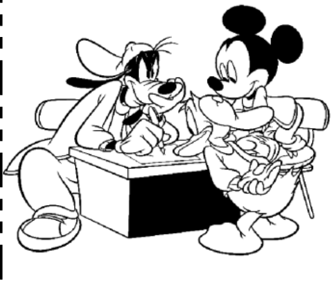
لدينا :

$$M \in (S) \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1=9$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+z^2-2z-7=0$$

ومنه $x^2-2x+y^2+z^2-2z-7=0$ معادلة ديكارتية للفلكة (S) .

. لدينا : $2^2+2^2+(-1)^2-2\times2-2\times(-1)-7=0$

إذن النقطة A تنتمي إلى (S) .



ب.لنحسب مسافة Ω عن المستوى (P) :

مسافة Ω عن المستوى (P) هي 3 $= \dfrac{|2\times2+2+2\times(-1)-13|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = d(\Omega;(P))$

استنتاج :

بما أن مسافة Ω عن المستوى (P) هي شعاع الفلكة فإن المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

2.أ.

لدينا : (D) مستقيم عمودي على المستوى (P) و المتجهة $\vec{u}(2;1;2)$ منظمية على المستوى (P) .

ومنه : $\vec{u}(2;1;2)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) .

لدينا. : $\overrightarrow{\Omega A}(1\,;2\,;-2)$

و $\vec{u}(2\,;\,1\,;2)$

إذن :

$$\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=6\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$$

ومنه :مثلوث إحداثيات $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$ هو $(6;-6;-3)$

ب.حساب : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$:

لدينا : $3 = \dfrac{\sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

ومنه : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=3$

استنتاج : لدينا : مسافة النقطة Ω عن المستقيم (D) هي : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} = 3$

إذن: مسافة النقطة Ω عن المستقيم (D) هي شعاع الفلكة (S) .

ومنه :المستقيم (D) مماس للفلكة (S) .(أي أن لهما نقطة مشتركة وحيدة)

وحيث أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D) (حسب المعطيات) والفلكة (S) (السؤال 1)أ.)

فإن المستقيم (D) مماس للفلكة (S) في النقطة A.

التمرين الثاني :

1.نحل في C المعادلة : $z^2 - 6z + 25 = 0$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة .

مميز المعادلة هو $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 25 = -64$

بما أن $\Delta \prec 0$ فإن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما : $z_1 = \dfrac{6-8i}{2} = 3-4i$ و $z_2 = 3+4i$

ومنه : $S = \{3-4i\ ;\ 3+4i\}$

2.نحسب $\dfrac{d-c}{a-c}$:

لدينا : $\dfrac{d-c}{a-c} = \dfrac{5+6i-2-3i}{3+4i-2-3i} = \dfrac{3+3i}{1+i} = 3$

استنتاج :

بما أن : $\dfrac{d-c}{a-c} \in R$ فإن النقط A و C و D مستقيمية .

ب.لدينا : P صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته $\dfrac{3}{2}$

إذن : $\overrightarrow{BP} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$

وبالتالي : $p - b = \dfrac{3}{2}(a-b)$

أي أن : $p = b + \dfrac{3}{2}(a-b) = 3-4i + \dfrac{3}{2}(3+4i-3+4i) = 3-4i+12i = 3+8i$

ومنه : العدد $p = 3+8i$ هو لحق النقطة P صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته $\dfrac{3}{2}$

ج.نكتب على الشكل المثلثي العدد $\dfrac{d-p}{a-p}$:

لدينا : $\dfrac{d-p}{a-p} = \dfrac{5+6i-3-8i}{3+4i-3-8i} = \dfrac{2-2i}{-4i} = \dfrac{2+2i}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

وبالتالي : $\dfrac{d-p}{a-p} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

استنتاج :لدينا : $\frac{d-p}{a-p}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه : إذن : $\left|\frac{d-p}{a-p}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg\left(\frac{d-p}{a-p}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

وبالتالي : $\frac{|d-p|}{|a-p|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

ومنه: $\frac{PD}{PA}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

وبالتالي : $PA=\sqrt{2}PD$ و $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

$\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية $\left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}\right)$ و $PA=\sqrt{2}PD$

التمرين الثالث :

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة .

السحب يتم بالتتابع وبدون إحلال إذن كل سحبة عبارة عن ترتيبة بدون تكرار لعنصرين من بين 9.

وبالتالي : $card\Omega=A_9^2=9\times8=72$

1.نحدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X :

عندما نسحب كرتين من الكيس يكون عدد الكرات البيضاء المتبقية في هذا الكيس هو 2 أو 1 او 0

ومنه:القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 2 و 1 و0 .

2)نبين أن $p(X=0)=\frac{1}{36}$ و $p(X=1)=\frac{7}{18}$

بما أنه لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس فإن الإحتمال منتظم .

الحدث $(X=0)$ هو سحب كرين بيضاوين من الكيس ولدينا : $p(X=0)=\frac{card(X=0)}{card\Omega}=\frac{A_2^2}{72}=\frac{2\times1}{72}=\frac{1}{36}$

الحدث $(X=1)$ هو سحب كرةبيضاءوكرة سوداء من الكيس ولدينا :

$$p(X=1)=\frac{card(X=0)}{card\Omega}=\frac{C_2^1A_2^1A_7^1}{72}=\frac{2\times2\times7}{72}=\frac{7}{18}$$

ومنه : $p(X=0)=\frac{1}{36}$ و $p(X=1)=\frac{7}{18}$

3)نعط قانون احتمال x :

لدينا : $p(X=2)=\frac{card(X=2)}{card\Omega}=\frac{A_7^2}{72}=\frac{42}{72}=\frac{21}{36}$

قانون احتمال هو :

القيم x_i للمتغير العشوائي X	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{21}{36}$

.الأمل الرياضي للمتغير X هو : $0\times\frac{1}{36}+1\times\frac{7}{18}+2\times\frac{21}{36}=\frac{14}{9}$

التمرين الرابع :

1.نتحقق أن : $1-u_{n+1}=\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ لكل n من N :

ليكن n من N .

لدينا : $1-u_{n+1}=1-\frac{1+4u_n}{7-2u_n}=\frac{7-2u_n-1-4u_n}{7-2u_n}=\frac{6-6u_n}{5+2-2u_n}=\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$

ومنه : $1-u_{n+1}=\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ لكل n من N .

.نبين الترجع أن : $1-u_n\succ 0$ لكل n من N .

من أجل $n=0$ لدينا $1-u_0\succ 0$ لأن $u_0=0$.

ليكن n من N .

نفترض أن $1-u_n\succ 0$.لنبين أن $1-u_{n+1}\succ 0$.

لدينا : $1-u_{n+1}=\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$

وبما أن $1-u_n\succ 0$ فإن $6(1-u_n)\succ 0$ و $5+2(1-u_n)\succ 0$.

وبالتالي : $\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}\succ 0$ أي $1-u_{n+1}\succ 0$.

ومنه حسب مبدأ الترجع :

$\boxed{1-u_n\succ 0 \text{ لكل n من N .}}$

2)أ.نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$:

ليكن n من N ،

لدينا : $v_{n+1}=\frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}-1}=\frac{2\frac{1+4u_n}{7-2u_n}-1}{\frac{1+4u_n}{7-2u_n}-1}=\frac{\frac{2+8u_n-7+2u_n}{7-2u_n}}{\frac{1+4u_n-7+2u_n}{7-2u_n}}=\frac{10u_n-5}{6u_n-6}=\frac{5}{6}.\frac{2u_n-1}{u_n-1}=\frac{5}{6}v_n$

إذن : $v_{n+1}=\frac{5}{6}v_n$ لكل n من N .

ومنه : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{6}$.

نكتب v_n بدلالة n :

ليكن n من N ،

حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا : $v_n=v_0.\left(\frac{5}{6}\right)^n$

ولدينا : $v_0=\frac{2u_0-1}{u_0-1}=1$ لأن $u_0=0$.

ومنه : $v_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ لكل n من N .

2)نبين أن : $u_n=\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$ لكل n من N .

ليكن n من N ،

لدينا : $v_n=\dfrac{2u_n-1}{u_n-1}$

إذن : $v_n\left(u_n-1\right)=2u_n-1$

أي : $v_n.u_n-v_n=2u_n-1$

أي : $v_n.u_n-2u_n=v_n-1$

أي : $u_n.\left(v_n-2\right)=v_n-1$

وبالتالي : $u_n=\dfrac{v_n-1}{v_n-2}$

وحيث أن : $v_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ فإن : $u_n=\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$

ومنه : $u_n=\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$ لكل n من N .

استنتاج :

لدينا : $-1\prec\frac{5}{6}\prec 1$ إذن : $\lim\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$

ومنه : $\lim u_n=\frac{1}{2}$

التمرين الخامس :

نحدد الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ على R :

لكل x من R ، $2x\left(x^2-1\right)^{2009}=\left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^{2009}$

ومنه :الدوال الأ صلية للدالة $x\mapsto 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ على R هي الدوال المعرفة عل R بما يلي :

$x\mapsto\frac{1}{2010}\left(x^2-1\right)^{2010}+c$ حيث c عدد خقيقي .

. نتحقق أن :

$$\int_1^{\sqrt{2}}2x\left(x^2-1\right)^{2009}dx=\left[\frac{1}{2010}\left(x^2-1\right)^{2010}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2010}\left[\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-1\right)-\left(1^2-1\right)\right]=\frac{1}{2010}$$

ومنه : $\int_1^{\sqrt{2}}2x\left(x^2-1\right)^{2009}dx=\frac{1}{2010}$

2) باستعمال مكالمة بالأجزاء بين أن : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = 6\ln 3 - 2$:

نضع : $\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 2x+1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) = x^2 + x \end{cases}$

إذن :

$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = [(x^2+x)\ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2+x}{x+1}dx$$
$$= 6\ln 3 - \int_0^2 x dx = 6\ln 3 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$= 6\ln 3 - \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)$$
$$= 6\ln 3 - 2$$

ومنه : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = 6\ln 3 - 2$

التمرين السادس :

1.أ.نتحقق أن $f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ لكل x من R :

ليكن x من R ،

لدينا : $$f(x) = x\left(\frac{e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}\right) = x\left(\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}\right) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$$

ومنه : $f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ لكل x من R .

1)ب. نبين أن f زوجية :

لدينا $D_f = R$

ليكن x من R ،

لدينا $(-x) \in R$ و $$f(-x) = -x\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right) = -x\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) = f(x)$$

ومنه لكل x من R : $(-x) \in R$ و $f(-x) = f(x)$.

وبالتالي f زوجية .

. نبين أن : $f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ لكل x من R

ليكن x من R .

لدينا : $$f(x) - x = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) - x = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} - 1\right) = x\left(\frac{1-e^{-2x}-1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

إذن : $f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ لكل x من R .

ج.نبين أن : $\lim f(x)=+\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x=-\infty$ و $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$ إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$.

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

. نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$.

نضع : $u=-2x$. عندما تؤول x إلى $(+\infty)$ ، u تؤول إلى $(-\infty)$.

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{ue^{u}}{1+u}=0$ لأن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$.

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$

استنتاج : لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$.

إذن : المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C) جوار $(+\infty)$.

2)نبين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن x من المجال $[0;+\infty[$ ،لدينا : $f(x)-x=\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

بما أن $x\geq0$ فإن $f(x)-x\geq0$

وبالتالي $f(x)-x\geq0$ لكل x من المجال $[0;+\infty[$.

ومنه : المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[0;+\infty[$

3) أ. نبين أن $f'(x)=\dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ لكل x من R :

الدالة f قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا :

$$f'(x)=(x)'\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)'=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+x\frac{2e^{2x}.(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$=\frac{e^{4x}-1}{(e^{2x}+1)^2}+x\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

نتحقق أن $f'(0)=0$:

لدينا : $f'(0)=\dfrac{e^{0}-1+4\times0\times e^{0}}{(e^{0}+1)^2}=\dfrac{0}{1}=0$ لأن $e^{0}=1$.

ومنه : $f'(x)=\dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ لكل x من R و $f'(0)=0$.

3) ب. نبين أن : $e^{4x}-1\geq0$ لكل x من $[0;+\infty[$.

ليكن x من $[0;+\infty[$ ،

لدينا : $x\geq0$ إذن : $4x\geq0$ وبالتالي : $e^{4x}\geq e^{0}$ أي $e^{4x}\geq1$.

وبالتالي : $e^{4x}-1\geq0$ لكل x من $[0;+\infty[$.

استنتاج :

ليكن x من $[0;+\infty[$ ،

إذن $4xe^{2x}\geq 0$.

وبما أن $e^{4x}-1\geq 0$ فإن : $e^{4x}-1+4xe^{2x}\geq 0$

3)ج. نضع جدول تغيرات f على $[0;+\infty[$:

لدينا $e^{4x}-1+4xe^{2x}\geq 0$ و $\left(e^{2x}+1\right)^2\geq 0$ لكل x من $[0;+\infty[$.

إذن : $f'(x)\geq 0$ لكل x من $[0;+\infty[$.

وبالتالي الدالة f تزايدية على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات f على $[0;+\infty[$ هو :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
f	0 ↗	$+\infty$