

تقديم : ذ. الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

التمرين الأول :

(1) لنبين أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,2,3)$ وشعاعها هو 5.لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

$$M \in (S) \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1^2 + (y-2)^2 - 2^2 + (z-3)^2 - 3^2 - 11 = 0 \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$$

ومنه مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,2,3)$ وشعاعها هو 5.(2) أ) نبين أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\overline{AB}(1,3,-4) \text{ لدينا :}$$

$$\overline{AC}(0,3,-4) \text{ و}$$

إذن :

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{ومنه : } \overline{AB} \wedge \overline{AC} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

استنتاج : لدينا $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$ إذن A و B و C غير مستقيمة وبالتالي تحدد مستوى (ABC).نعلم أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منتظمة على (ABC).لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \times (x-0) + 4 \times (y+2) + 3 \times (z-0) = 0 \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow 4y + 3z + 8 = 0$$

ومنه : $4y + 3z + 8 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).(2) ب) نحسب $d(\Omega, (ABC))$:

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|4 \times 2 + 3 \times 3 + 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5 \text{ لدينا :}$$

$$\text{ومنه } d(\Omega, (ABC)) = 5$$

استنتاج : بما أن $d(\Omega, (ABC))$ يساوي شعاع الفلكة

فإن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).

(3) أ) نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) :المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) .إذن (Δ) موجه بمتجهة منتظمة على (ABC) وهي $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.وبالتالي فإن (Δ) مار من $\Omega(1,2,3)$ وموجه بالمتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ 

http://www.vrac-colorpages.net

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) : \text{ومنه تمثيل بارامترى للمستقيم هو}$$

(3) ب) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

$$M(x,y,z) \in (\Delta) \cap (ABC) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \\ 4y+3z+8=0 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\Rightarrow 4(2+4t)+3(3+3t)+8=0$$

$$\Rightarrow 25t = -25$$

$$\Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=0 \end{cases}$$

ومنه : مثلث إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) هو $(1,-2,0)$.

(3) ج) نتحقق من أن H هي نقطة تماس (ABC) و (S) .

لدينا H نقطة من المستوى (ABC)

بما أن مثلث إحداثيات H يحقق معادلة الفلكة (S) فإن $H \in (S)$.

وبالتالي H نقطة مشتركة بين (ABC) و (S) .

وبما أن (ABC) مماس للفلكة (S) فإن للمستوى (ABC) و الفلكة (S) نقطة مشتركة وحيدة وهي نقطة التماس.

ومنه H هي نقطة تماس (ABC) و (S) .

التمرين الثاني :

(1) نحل في C المعادلة : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة .

$$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = -64$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما : $z_1 = \frac{8\sqrt{3}-8i}{2} = 4\sqrt{3}-4i$ و $z_2 = 4\sqrt{3}+4i$

ومنه : $S = \{4\sqrt{3}-4i, 4\sqrt{3}+4i\}$

$$(2) \text{ ا) نبين أن } z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-0) + 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) z$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$



http://www.vrac-coloring.com

ومنه :

$$z' = \left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

(1) نبين أن صورة A بالدوران R

$$\text{لدينا : } \left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a = \left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times 8i = -4i + 4\sqrt{3}$$

$$\text{إذن : } \left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a = b$$

ومنه :

صورة A بالدوران R .



http://www.vrac-coloriages.net

(2) ج) نبين أن $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$:

لدينا .

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{c-b} &= \frac{8i - 4\sqrt{3} + 4i}{8\sqrt{3} + 8i - 4\sqrt{3} + 4i} = \frac{-4\sqrt{3} + 12i}{4\sqrt{3} + 12i} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(-1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3}{4} \\ &= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ومنه :

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لنكتب العدد $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ على الشكل المثلثي :

لدينا :

$$\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \left[1, \frac{\pi}{3} \right]$$

(2) نستنتج أن ABC متساوي الأضلاع :

$$\frac{a-b}{c-b} = \left[1, \frac{\pi}{3} \right] \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{إذن : } \left| \frac{a-b}{c-b} \right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg \left(\frac{a-b}{c-b} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{وبالتالي : } \left| \frac{a-b}{c-b} \right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg \left(\frac{a-b}{c-b} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{ومنه : } \frac{BA}{BC} = 1 \quad \text{و} \quad \arg \left(\frac{BA}{BC} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

وبالتالي : $BA = BC$ و $[\overline{BC}, \overline{BA}] \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

وهذا يعني أن

المثلث ABC متساوي الأضلاع.

التمرين الثالث :

السحب يتم بالتتابع وبدون إحلال. إذن : كل نتيجة للتجربة العشوائية تعتبر ترتيبية بدون تكرار لعنصرين من بين 8. ليكن Ω كون الإمكانات . لدينا $\text{card}\Omega = A_8^2 = 56$

$$(1) \text{ نسحب كرتين من بين ثلاث كرات تحمل الرقم 3 : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{A_3^2}{56} = \frac{3 \times 2}{56} = \frac{3}{28}$$

. سحب كرتين إحداهما على الأقل تحمل الرقم 3 يعني سحب مع مراعاة الترتيب كرة تحمل الرقم 3 وأخرى لاتحمل الرقم 3

$$\text{ومنه } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{A_2^2 + 2!A_2^1A_6^1}{56} = \frac{2 + 24}{56} = \frac{13}{28}$$

(2) أ) نسحب كرتين بالتتابع وبدون إحلال من الصندوق . عدد الكرات المسحوبة التي تحمل عددا فرديا يمكن أن يكون 0 أو 1 أو 2. ومنه قيم X هي : 0 و 1 و 2.

(2) ب) الحدث $(X=1)$ هو سحب كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا .

$$\text{ومنه } p(X=1) = \frac{2!A_5^1A_3^1}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

(2) ج) لنعط قانون احتمال X :

$$p(X=0) = \frac{A_3^2}{56} = \frac{3 \times 2}{56} = \frac{3}{28}$$

$$p(X=2) = \frac{A_5^2}{56} = \frac{5 \times 4}{56} = \frac{10}{28}$$

$$p(X=1) = \frac{2!A_5^1A_3^1}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

ومنه الجدول التالي :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{10}{28}$

التمرين الرابع :

(1) نبين أن : $u_n > 0$ لكل n من N

نستعمل الإستدلال بالترجع :

من اجل $n=0$ لدينا $u_0 > 0$ لأن $u_0 = 1$.

ليكن n من N .

نفترض أن $u_n > 0$. لنبين ان $u_{n+1} > 0$.

بما أن $u_n > 0$ فإن $3u_n > 0$ و $21+u_n > 0$

وبالتالي $\frac{3u_n}{21+u_n} > 0$ أي $u_{n+1} > 0$

ومنه حسب مبدأ الترجع نستنتج أن : $u_n > 0$ لكل n من N .

(2) نبين أن $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ لكل n من N .

ليكن n من N .

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}u_n - u_{n+1} &= \frac{1}{7}u_n - \frac{3u_n}{21+u_n} \\ &= \frac{21u_n + u_n^2 - 21u_n}{7(21+u_n)} \quad \text{لدينا :} \\ &= \frac{u_n^2}{7(21+u_n)} \end{aligned}$$

بما أن $u_n > 0$ فإن $\frac{u_n^2}{7(21+u_n)} > 0$ وبالتالي $\frac{1}{7}u_n - u_{n+1} > 0$

ومنه : $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ لكل n من N .

(3) نبين أن (u_n) متتالية تناقصية :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{21+u_n} - u_n \\ &= \frac{3u_n - 21u_n - u_n^2}{21+u_n} \quad \text{لدينا :} \\ &= \frac{-18u_n - u_n^2}{21+u_n} < 0 \end{aligned}$$

وبالتالي : $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من N ومنه (u_n) تناقصية.

وبما أن (u_n) تناقصية ومصغرة بالصفر فإنها متقاربة.

(4) أ) نبين بالترجع أن $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من N^* :

من أجل $n=1$ لدينا $u_1 < \left(\frac{1}{7}\right)^1$ لأن $u_1 = \frac{3u_0}{21+u_0} = \frac{3}{22} < \frac{1}{7}$.

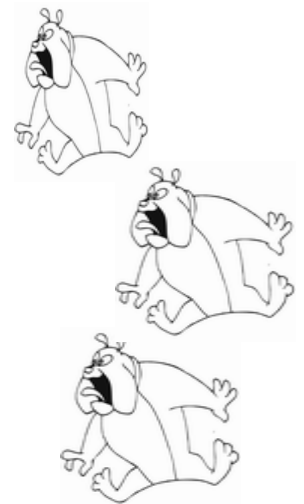
ليكن n من N^* .

نفترض أن $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$. لنبين أن : $u_{n+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

لدينا $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ إذن $\frac{1}{7}u_n < \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$ أي $\frac{1}{7}u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

وحيث أن $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ فإن $u_{n+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

ومنه : حسب مبدأ الترجع نستنتج أن $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من N^* .



(4) ب) نحدد نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $0 < u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من N^* .

$$\text{إذن } 0 \leq \lim u_n \leq \lim \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

$$\text{وبما أن } -1 < \frac{1}{7} < 1 \text{ فإن } \lim \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$$

ومنه $\lim u_n = 0$ (حسب مبرهنة الدركي احتراماتي وتقديراتي !)

التمرين الخامس :

الجزء 1:

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$$

(1) نتحقق أن : $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$ نشر ثم تبسيط ..

(ب) الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ ولكل x من $]0, +\infty[$ لدينا :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - 2 \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{3x^3 - x - 2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x} \text{ وبما أن } 3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$$

$$\text{ومنه } g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x} \text{ لكل } x \text{ من }]0, +\infty[.$$

(2) نتحقق من أن $\frac{(3x^2 + 3x + 2)}{x} > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$.

ليكن x من $]0, +\infty[$.

إذن : $3x > 0$ و $3x^2 > 0$.

وبالتالي $3x^2 + 3x + 2 > 0$.

$$\text{ومنه } \frac{(3x^2 + 3x + 2)}{x} > 0 \text{ لكل } x \text{ من }]0, +\infty[.$$

(2) استنتاج:

$$\text{لدينا } g'(x) = \frac{(3x^2 + 3x + 2)}{x} > 0 \text{ لكل } x \text{ من }]0, +\infty[.$$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(x-1)$ على $]0, +\infty[$.

(3) نبين أن الدالة g تناقصية على $]0, 1[$ و تزايدية على $]1, +\infty[$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

ومنه $g'(x) \leq 0$ لكل x من $]0, 1[$ و $g'(x) \geq 0$ لكل x من $]1, +\infty[$.

وبالتالي فإن g تناقصية على $]0, 1[$ و تزايدية على $]1, +\infty[$.

(3) نستنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$.

ليكن x من $]0, +\infty[$,

إذا كان $x \leq 1$ فإن $g(1) \leq g(x)$ لأن g تناقصية على المجال $]0, 1[$.



<http://www.vrac-coloriages.net>

. إذا كان $1 \leq x$ فإن $g(1) \leq g(x)$ لأن g تزايدية على المجال $[1, +\infty[$.
ومنه $g(1) \leq g(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$.
وحيث أن $g(1) < 0$ فإن $g(x) < 0$ لكل x من $]0, +\infty[$.

الجزء الثاني :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

(1) نبين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0, +\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولكل x من $]0, +\infty[$ لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x - 1 + \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{x^4 + x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{x^4 - x^2 + 3x - 2x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{x^3 - x + 3 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

استنتاج : لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0, +\infty[$

بما أن $0 < x$ و $0 < g(x)$
فإن $0 < f'(x)$

ومنه f تزايدية على $]0, +\infty[$.

(2) نبين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} x - 1 + \ln(x) = -\infty$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = -\infty$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

هندسيا : المستقيم المعرف بالمعادلة $x=0$ مقارب للمنحنى (C).

(2) ب) نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



<http://www.vrac-coloriages.net>

(2 ج) نبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى جوار $(+\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$$

إذن : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) جوار $(+\infty)$

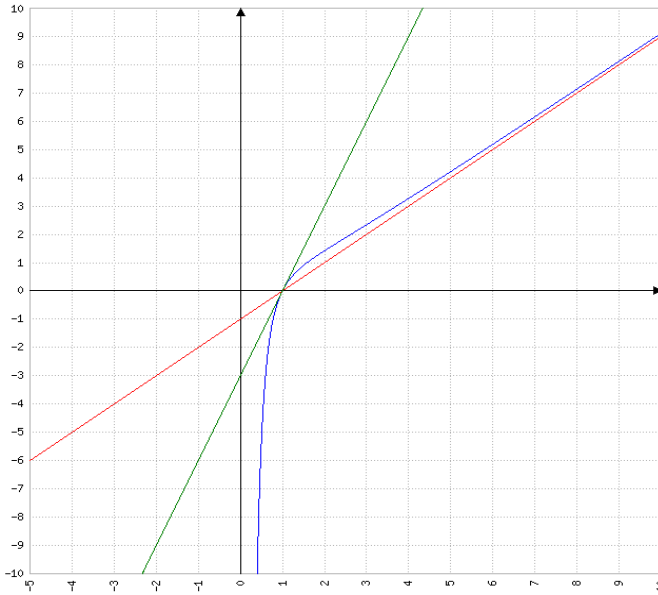
(3) نبين أن $y = 3(x-1)$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثياتها هو $(1,0)$.

معادلة المستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

ولدينا $f(1) = 0$ و $f'(1) = 3$ لأن $\ln 1 = 0$.

إذن $y = 3(x-1)$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثياتها هو $(1,0)$.

(4) إنشاء (Δ) و (C):



المنحنى (C) باللون الأزرق

المستقيم (Δ) باللون الأحمر.

مماس (C) في النقطة ذات الأفصول 1 باللون الأخضر

(5 أ) نبين أن $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$

$$\begin{cases} v'(x) = \frac{1}{x} \\ u(x) = \frac{-1}{x} \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} v(x) = \ln x \\ u'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^e \\ &= -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e} \quad \text{ومنه}$$

(5 ب) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتاهما $x = e$ و $x = 1$ هي :

$$.ua = \left\| \vec{i} \right\| \times \left\| \vec{j} \right\| = 1^2 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2 \quad \text{حيث } ua \text{ هي وحدة قياس المساحة أي}$$

$$\int_1^e |f(x) - (x-1)| dx \times ua$$

$$\int_1^e |f(x) - (x-1)| dx = \int_1^e \left| x-1 + \frac{\ln x}{x^2} \right| dx$$

وحيث أن x عنصر من $[1, e]$ فإن $x-1 \geq 0$ و $\ln x \geq 0$ أي أن $x-1 + \frac{\ln x}{x} \geq 0$ (مجموع عددين موجبين)

وبالتالي :



http://www.vrac-coloristes.net

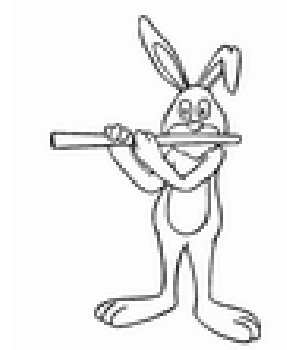
$$\begin{aligned}
\int_1^e |f(x) - (x-1)| dx &= \int_1^e x - 1 + \frac{\ln x}{x^2} dx \\
&= \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{-1}{x^2} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx \\
&= [\ln x]_1^e + [1/x]_1^e + 1 - \frac{2}{e} \\
&= (\ln e - \ln 1) + \left(\frac{1}{e} - 1\right) + 1 - \frac{2}{e} \\
&= 1 - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

ومنه مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{ cm}^2$$



<http://www.vrac-colorpages.net>



<http://www.vrac-colorpages.net>

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

wadiifi@hotmail.com