تقديـــم : ذ. الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

==

التمرين الأول :

1.نبين أن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$:

لدينا : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(4,0,-3) \\ \overrightarrow{AC}(8,1,-6) \end{cases}$

إذن :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 4\vec{k}$$

ومنه : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$.

استنتاج :

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل $3x + 4z + d = 0$ حيث d عدد حقيقي .

وحيث أن B نقطة من المستوى (ABC) فإن $3 \times 3 + d = 0$ أي أن : $d = -9$.

ومنه $3x + 4z - 9 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2. نبين أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها هو 5 .

لدينا $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

يكافئ : $(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + z^2 - 15 = 0$

يكافئ : $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$

ومنه : مركز الفلكة (S) هو $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها هو 5 .

3.أ. تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) :

المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) و المتجهة $\vec{n}(3,0,4)$ منظمية على المستوى (ABC) .

إذن $\vec{n}(3,0,4)$ موجهة للمستقيم (Δ)

وعليه فإن المستقيم (Δ) مار من $\Omega(3,1,0)$ و موجه بالمتجهة $\vec{n}(3,0,4)$.

ومنه : النظمة $(t \in R)$ $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

3.ب. نبين أن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة في النقطتين E و F :

بما أن المستقيم (Δ) يمر من مركز الفلكة فإنه يخترقها في نقطتين .

...tmail.com

وحيث أن E و F تحققان معادلة الفلكة فهما تنتميان إليها .
وحيث أن E و F تنتميان إلى المستقيم (Δ) (من اجل القيمتين 1 و (-1) للبارامتر t)
فالنقطتان مشتركتان بين المستقيم والفلكة
وعليه فإن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة في النقطتين E و F
ملاحظة : يمكن حل النظمة المكونة من معادلة الفلكة وتمثيل بارامتري للمستقيم .

التمرين 2 :

1.حل المعادلة المقترحة :

مميز المعادلة هو $\Delta = -4$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و هما $3+i$ و $3-i$.

2.أ. بين أن $z' = iz + 2 - 4i$:

لدينا : $R(M) = M'$ يكافئ $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$

يكافئ $z' = i(z - 3 + i) + 3 - i$

ومنه : $z' = iz + 2 - 4i$

2.ب. نحدد لحق صورة C بالدوران :

لدينا $R(C) = C'$ إذن : $c' = i(7-3i) + 2 - 4i$

وبالتالي : $c' = 5 + 3i$ هو لحق صورة C بالدوران R .

2.ج. نبين أن $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$:

لدينا :

$$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i}$$
$$= \frac{2+2i}{4-4i}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1+i}{1-i}$$
$$= \frac{1}{2}i$$

استنتاج :

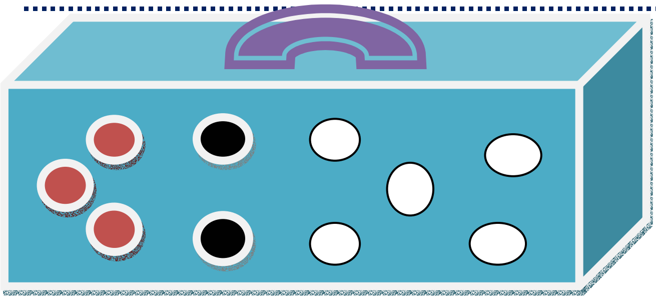
لدينا $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$ و $\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

إذن : $\left\|\frac{c'-b}{c-b}\right\| = \frac{1}{2}$ و $\arg\left(\frac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

وبالتالي : $\frac{BC'}{BC} = \frac{1}{2}$ و $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

ومنه المثلث BCC' قائم الزاوية في B وأن $BC = 2BC'$.

التمرين الثالث :



1.نحسب احتمالي الحدثين A و B :

السحب يتم تأنيا .(لايوجد ترتيب)

إذن كل سحبة عبارة عن تأليفة لأربع عناصر من بين 10 .

ومنه $card\,\Omega = C_{10}^{4} = 210$.

. وقوع الحدث A يعني سحب كرة حمراء واحدة فقط وثلاثة غير حمراء

ومنه

$$p(A) = \frac{C_3^1 C_7^3}{210}$$
$$= \frac{1}{2}$$

. الحدث المضاد $\overline{B}$ للحدث B هو عدم الحصول على أية كرة بيضاء.

ولدينا : $p(\overline{B}) = \frac{C_5^4}{210} = \frac{5}{210}$ و $p(B) = 1 - p(\overline{B})$

إذن : $p(B) = 1 - \frac{5}{210} = \frac{41}{42}$

2.أ. نتحقق من قيم X :

قيمة المتغير X هي عدد الكرات الحمراء المحصل عليها بعد سحب 4 كرات كمشة واحدة من الصندوق .

الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء .

عندما نسحب دفعة واحدة أربع كرات من هذا الصندوق ،يكون عدد الكرات الحمراء التي نحصل عليها إما 0 ، 1 ،2 أو 3 .

ومنه قيم X هي : 0 و 1 و 2 و 3 .

2.ب. نبين أن : $p(X=2) = \frac{3}{10}$ و $p(X=0) = \frac{1}{6}$:

الحدث$(X=2)$ هوالحصول على كرتين حمراوين و كرتين غير حمراوين :

ومنه : $p(X=2) = \frac{C_3^2 . C_7^2}{210} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$

الحدث $(X=0)$ هو عدم الحصول على أية كرة حمراء

ومنه : $p(X=0) = \frac{C_7^4}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$

ج. نحدد قانون احتمال X :

لدينا : $X(\Omega) = \{0 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, 3\}$

سبق وحددنا احتمالات الأحداث $(X=0)$ ، $(X=1)$ وهو الحدث A ثم الحدث $(X=2)$.

الحدث $(X=3)$ يتحقق عندما نسحب 3كرات حمراء وواحدة غير حمراء .

ولدينا $p(X=3) = \frac{C_3^3 C_7^1}{210} = \frac{7}{210}$

نلخص النتائج في الجدول التالي :

X_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/6	1/2	3/10	1/30

التمرين الرابع :

1.نبين بالترجع أن $u_n - 1 \succ 0$ لكل n من N.

. العبارة صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0 = 2$

. ليكن n من N.

نفترض أن: $u_n - 1 \succ 0$

لنبين أن : $u_{n+1} - 1 \succ 0$

لدينا :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3.u_n - 1}{2u_n} - 1$$

$$= \frac{u_n - 1}{2u_n}$$

وبما أن $u_n - 1 \succ 0$

فإن $u_n \succ 1$ وبالتالي $2u_n \succ 0$

وعليه فإن $\frac{u_n - 1}{2u_n} \succ 0$ أي $u_{n+1} - 1 \succ 0$

.ومنه حسب مبدأ الترجع : $u_n - 1 \succ 0$ لكل n من N.

2.أ. نبين أن المتتالية (v_n) هندسية :

ليكن n من N.

لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2.\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$$

$$= \frac{1}{2}v_n$$

ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ لكل n من N.

وعليه فإن المتتالية المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

استنتاج : حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا : $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا : $v_0 = \frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \frac{1}{3}$

إذن : $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من N.

2.ب. نبين أن $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$:

ليكن n من N.

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \Rightarrow v_n(2u_n - 1) = u_n - 1$$
$$\Rightarrow 2v_n.u_n - v_n = u_n - 1$$
$$\Rightarrow 2v_n.u_n - u_n = v_n - 1$$
$$\Rightarrow u_n.(2v_n - 1) = v_n - 1$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$$

ومنه : $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ لكل n من N.

استنتاج :

لدينا $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ و $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من N

إذن
$$u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

وحيث أن $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ فإن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

ومنه : $\lim u_n = 1$

3.حساب $\lim w_n$:

لدينا $\lim u_n = 1$ والدالة $\ln$ متصلة في 1

إذن : $\lim w_n = \ln 1$

ومنه : $\lim w_n = 0$

wadiiifi@hotmail.com

التمرين الخامس :

الجزء الأول : $g(x)=1+4xe^{2x}$

1.نبين أن : $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من R :

الدالة g قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا :

$$g'(x)=4e^{2x}+2\times 4xe^{2x}$$
$$=4(1+2x)e^{2x}$$

ومنه : $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من R

2. نحدد تغيرات g :

لكل x من R : $e^{2x}\succ 0$

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $1+2x$

ولدينا : $1+2x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

ومنه $g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

وعليه فإن : g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

3.أ.نبين أن : $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$:

لدينا

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=1+4\frac{1}{2}e^{-1}$$
$$=1-2e^{-1}$$
$$=1-\frac{2}{e}$$

استنتاج : لدينا $2\prec e$ إذن $\frac{2}{e}\prec 1$ وبالتالي $0\prec 1-\frac{2}{e}$

ومنه : $0\prec g\left(-\frac{1}{2}\right)$

2.ب. نستنتج أن $g(x)\succ 0$ لكل x من R .

ليكن x من R ،

إذا كان $x\geq -\frac{1}{2}$ فإن $g(x)\geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$ لأن g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$

وبالتالي : $g(x)\succ 0$

إذا كان $x\leq -\frac{1}{2}$ فإن $g(x)\geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$ لأن g تناقصية على $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

وبالتالي : $g(x)\succ 0$

ومنه : $g(x)\succ 0$ لكل x من R .

$$f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$$

الجزء الثاني :

1.نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

.نبين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$:

لدينا $f(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+x+1$

نضع $u=2x$ إذن : $\lim\limits_{x\to\infty} 2xe^{2x}=\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$ و $\lim\limits_{x\to\infty} e^{2x}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2.بين أن $f'(x)=g(x)$ لكل x من R :

الدالة f قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا :

$$f'(x)=2e^{2x}+2(2x-1)e^{2x}+1$$
$$=1+4xe^{2x}$$

ومنه $f'(x)=g(x)$ لكل x من R.

استنتاج : لدينا $f'(x)=g(x)$ لكل x من R و g موجبة قطعا على R .

ومنه f تزايدية قطعا على R .

3.أ.نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}e^{2x}+\frac{x+1}{x}\right)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$.

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$.

استنتاج : بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$

فإن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب جوار $(+\infty)$.

3.أ. نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))$:

لدينا :

$$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=\lim\limits_{x\to-\infty}(2xe^{2x}-e^{2x})$$
$$=0$$

(انظر الجواب على السؤال 1)

استنتاج :

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=0$

فإن : المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=x+1$ مقارب لمنحنى الدالة f جوار $(+\infty)$.

ج. نحدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (Δ) ومنحنى الدالة f .

@hotmail.com

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى ،
لدينا :

$$M \in (\Delta)\cap(C) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x+1 \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)e^{2x} = 0 \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 0 \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ومنه : زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (Δ) و (C) هو $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

تحديد الوضع النسبي (Δ) و (C) :

لدينا : $f(x)-(x+1)=(2x-1)e^{2x}$ و $e^{2x} \succ 0$

ومنه إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ هي إشارة $2x-1$.

إذا كان $x \geq \frac{1}{2}$ فإن $f(x)-(x+1)\geq 0$ ومنه (C) يوجد فوق (Δ) على $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

إذا كان $x \leq \frac{1}{2}$ فإن $f(x)-(x+1)\leq 0$ ومنه (C) يوجد تحت (Δ) على $\left]-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right]$.

4.أ.بين ان $y=x$ معادلة مماس (C) في أصل المعلم :

معادلة مماس (C) في النقطة التي أفصولها **0** هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ولدينا $f'(0)=1$ و $f(0)=0$.

ومنه معادلة مماس (C) في أصل المعلم هي : $y=x$.

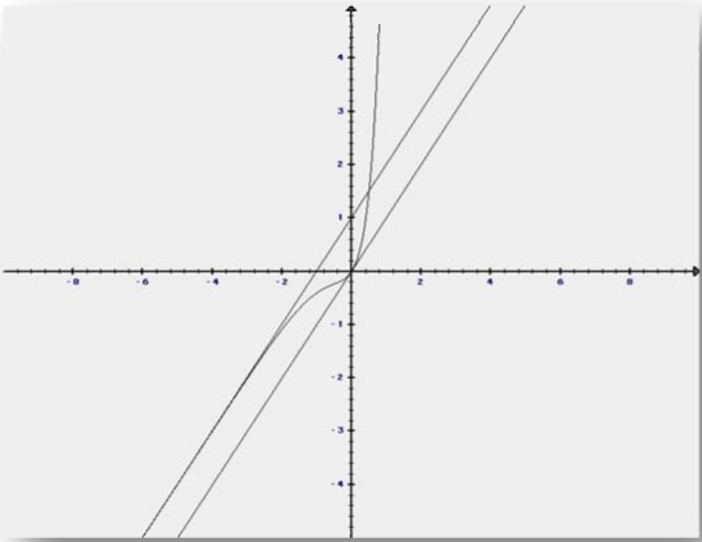
الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على R ولدينا لكل x من R : $f''(x)=g'(x)$

وحسب الجزء الأول من التمرين فإن g' أي f'' تنعدم في $\left(\frac{-1}{2}\right)$ وتغير إشارتها بجواره

ومنه النقطة التي أفصولها $\left(\frac{-1}{2}\right)$ تعتبر نقطة انعطاف (C) .

5.إنشاء (Δ) و (C) :

wadiiifi@hotmail.com



6.أ. نحسب التكامل :

نضع $\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ ولدينا : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}\,dx = \left[\frac{2x-1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{e}{2}$$

6.ب. لنحدد مساحة المستوى المحصور بين (C) والمستقيم (T)

بتأطير التعبير $f(x)-x$ حيث $0 \le x \le \frac{1}{2}$ أو بتوظيف دراسة تقعر المنحنى نستنتج أن $f(x)-x \ge 0$

مساحة الحيز المحصور بين (C) و (T) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ هي :

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)-x|\,dx \;\; ua$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left((2x-1)e^{2x}+1\right)dx \times 4cm^2$$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dx\right) \times 4cm^2$$

$$= 4\left(1-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\right) cm^2$$

$$= (6-2e)\,cm^2$$

مع متمنياتي لكم بالتوفيق

wadiiifi@hotmail.com